

## تأثير أعماق ومواقع الشقوق على الترددات الطبيعية للعتبات الحديدية

محمد نجيب عبدالله

مدرس مساعد

جامعة الموصل – كلية الهندسة – قسم الهندسة الميكانيكية

### الملخص

في هذا البحث ، تم دراسة تأثير أعماق ومواقع الشقوق المستعرضة على الترددات الطبيعية لعتبة حديدية مثبتة من جهة وسائبة من جهة أخرى تحليلياً . ابتداءً من اشتقاق معادلة حساب طاقة الانفعال الإضافية نتيجة الشق فقد تم التوصل إلى علاقة التغير في التردد الطبيعي عند وجود الشق وحسب ظروف تثبيت العتبة . أظهرت النتائج الرياضية إن وجود الشقوق سبب انخفاضاً في قيم الترددات الطبيعية للعتبة ، إذ أن الانخفاض في الترددات الطبيعية للعتبة قريبة من منطقة التثبيت كانت قليلة جداً مقارنة بالمواقع البعيدة لتثبيت . وأخيراً تم مقارنة النتائج الرياضية مع بعض النتائج العملية لبحوث سابقة فكانت متقاربة وصافياً سلوك منحنيات تردد

طبيعي

الكلمات المفتاحية :

## Effect of Depth and Location of cracks on the natural frequency of free beams

Mohammed Najeeb Abdullah

Assistant Lecturer

Mechanical Engineering Department , College of Engineering

University of Mosul

### Abstract

In this work , the influence of the location and depth of transverse cracks on the natural frequency of cantilever beam was studied. The study of the cracked beam has been carried out theoretically, starting from derivation of equation for the additional strain energy in the presence of a crack .The equation of natural frequency change due to the presence of a crack can also be calculating for cantilever beam . The results showed that the presence of the crack causes a decrease in the values of the natural frequencies of beam as

the decrease in the value of natural frequencies of the beam with cracks in the area nearer to the supports, was lesser than in areas away from the supports. Finally, the theoretical results were compared with the experimental results of previous researches, which were in a close agreement especially for the behavior of beam curves as function of the crack depth.

**Key Word** : Beam , Crack , Natural Frequency, Depth , Location .

### تعريف الرموز

قبل في 2006/5/22

أستلم في 2006/1/11

الوحدة	التعريف	الرمز
هرتز	التردد الطبيعي عند عدم وجود الشق	$n$
هرتز	التردد الطبيعي عند وجود الشق	
كليو غرام /		
----	نسبة بويسن	
ثانية /	سرعة موجة الاهتزاز	$C_w$
----	معامل التردد المميز	$n$
نيوتن /	إجهاد الانحناء	
		$a$
		$S$
نيوتن /		$E$
		$I_x$
		$L$
نيوتن .		$M_b$
	طاقة الانفعال الإضافية نتيجة التشقق	$W_1$
	طاقة الانفعال الكلية	$W_0$
		$x$
		$b$
		$h$
نيوتن /	عامل شدة الإجهاد	$K_I$
نيوتن /	الإجهاد	
		$U$
		$Y$
ثانية		$t$
هرتز	القيمة العظمى لذروة الاهتزاز	$A$

---	ثابت طور الاهتزاز	$K_n$
---	عظم إجهاد	$g_n$

## 1. المقدمة

تعتبر العتبات من الأجزاء الهيكلية (Construction element) المهمة بسبب استخدامها الواسع كعنصر إنشائي في العديد من الهياكل الفولاذية وفي العديد من هياكل المكنن ، لذلك فإنه من الضروري التعرف على السلوك الديناميك للعتبات المعيبة (Defective beams). إن وجود الشقوق في العتبات تزيد من مرونة الموضعية للعتبة (Local flexibility) ، إذ أن تأثير التشققات على الخصائص الديناميكية مثل التغير في الترددات الطبيعية ، أطوار الاهتزازات (Modes of vibration) تم تناوله في العديد من البحوث فضلا عن تمثيل الشقوق بطرق عديدة.

فقد تم استخدام طريقة العناصر المحددة (F.E.M.) من قبل الباحثان (Kam & Lee) [1] لإيجاد مواقع وقيم الشقوق للعتبة مثبتة من جهة وسائبة من جهة أخرى (Cantilever beam) متضمنا شقا واحداً فضلاً عن إيجاد قيم الترددات الطبيعية وتحقيقها عملياً . للعتبة المتمفصلة في كلا النهايتين (pinned beam) المتضمنة شقا واحداً وباستخدام معادلات رياضية تم دراسة تأثير الشق للترددات الطبيعية للعتبة من قبل [2] أما الباحثين (Chondras & Dimarogonas) [3] فقد درسا تأثير نسبة موقع الشق على طول العتبة وتأثير نسبة عمق الشق على ارتفاع العتبة ، فضلاً عن إجراء العديد من الاختبارات للترددات الطبيعية للعتبة من نوع (Euler – Bernoulli) . [4] (Chaudari and Maiti) عملية الكشف والتنبؤ عن (Taper)

اهتزازات عرضية تعتمد على قياس التردد الطبيعي عملياً باستخدام عتبة حديدية مثبتة من جهة من جهة أخرى . إما في الدراسة الحالية فقد تم اشتقاق معادلات رياضية لحساب معادلة التغير في الترددات الطبيعية عند إحداث شقوق في أعماق ومواقع مختلفة في العتبة .

## 2 . معادلة التغير في التردد الطبيعي عند وجود الشق :

لغرض إيجاد المعادلة الخاصة للتردد الطبيعي عند وجود الشق، فإنه يتعين حساب طاقة الانفعال الكلية، وطبقاً لنظرية الباحث (Gudmundson's) [5] لمعادلة من الدرجة الأولى ولحالة مقطع خارجي صغير للمادة على فرض أنه لا يوجد تغير في حجم المادة في حالة وجود

$$\omega_{crack}^2 = \omega_n^2 \left[ 1 - \frac{W_1}{W_o} \right] \dots\dots\dots (1)$$

حيث أن :-

$W_1$  طاقة الانفعال الإضافية نتيجة التشقق.

$W_0$  طاقة الانفعال الكلية.

(beam) بشكل ثابت من جهة وسائب من جهة أخرى عتبة حديدية

(cantilever beam) (1) وباستخدام نظرية (Euler)

الكلية ( $W_0$ ) يمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية [6] :

$$W_0 = \frac{1}{2} A^2 E \frac{\lambda_n^4}{L^4} I_x \cdot L \quad \dots\dots\dots (2)$$

والتردد الزاوي الطبيعي ( $\omega_n$ ) يمكن التوصل إليه من خلال العلاقات التالية

$$\lambda_n^4 = \frac{\omega_n^2}{C_w^2} \quad : [7]$$

..... (3)

$$C_w = \sqrt{\frac{EI_x}{\rho S L^4}} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\omega_n = \frac{\lambda_n^2}{L^2} \sqrt{\left(\frac{EI_x}{\rho S}\right)} \quad \dots\dots\dots (5)$$

حيث أن :-

$\lambda_n$  تمثل تردد المميز اللابعدي

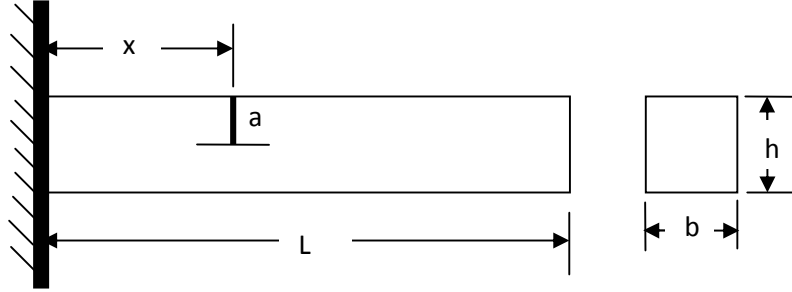
A القيمة العظمى لذروة الاهتزاز (تم اعتبارها قيمة ) .

L ( ) .

$I_x$  ( ) .

$\rho$  (density) (نيوتن / )

S .( )



(1) يوضح طريقة تثبيت العتبة

$\omega_n = 2\pi f_n$  يمكن التعبير عن  $\lambda_n$  بالعلاقة الآتية :

$$\lambda_n^2 = 2\pi f_n L^2 \sqrt{\frac{\rho S}{EI_x}} \dots\dots\dots (6)$$

في حالة تثبيت العتبة كعتبة حديدية فان قيم  $\lambda_n$  ولطور الاهتزاز الأول ت  
:- [8]

$$\lambda_1 = 1.875$$

ما بالنسبة للشقوق الصغيرة فان عامل شدة الإجهاد (وهو مقاومة المادة للكسر الفجائي مع قوة احتمالاتها للاجهادات) ذو حافة واحدة للشق في العتبة هي نفسه بالنسبة للشق ذو حافة واحدة مستوي غير متناهي عند جهد ثابت [9].

$$K_I = 1.12 \sigma \sqrt{\pi a} \quad \dots\dots\dots (7)$$

إن طاقة الانفعال في حالة وجود شق يمكن حسابها من معدل الطاقة المتحررة وكالاتي:-

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial W_1}{\partial a} = b \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

حيث أن :-

b

V نسبة بويسون (poission's ratio)

(8) فان طاقة الانفعال الإضافية بسبب وجود الشق تكون كالاتي:-

$$W_1 = b \frac{1-\nu^2}{E} (1.12)^2 \sigma^2 \pi \frac{a^2}{2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ومن خلال القوانين الخاصة لمقا التعبير عنه كالاتي :- [10]، نجد ان الجهد في حالة الانحناء يمكن

$$\sigma = \frac{M_b Y}{I} = -E \frac{\partial^2 w}{\partial \chi^2} Y \quad \dots\dots\dots (10)$$

ومن خلال المعادلة التفاضلية للاهتزاز الحر ( ) :- (

$$EI \frac{\partial w^4(x,t)}{\partial x^4} + M \frac{\partial w^2(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

في حالة تثبيت العتبة بشكل ثابت من جهة وسائب  
الحدية (boundary conditions) جهة اخرى، وطبقا للشروط  
:- [11]

$$W = A \left[ \cosh \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) - \cos \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) - K_n \left\{ \sinh \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) - \sin \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) \right\} \right] \dots (12)$$

حيث أن :-

$$A =$$

$K_n$  الثابت المتعلق بطور الاهتزاز يمكن إيجاده من العلاقة الآتية :-

$$K_n = \frac{\sin \lambda_n - \sinh \lambda_n}{\cos \lambda_n + \cosh \lambda_n} \quad \dots\dots\dots (13)$$

:- (12)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = A \left[ \frac{\lambda_n}{L} \sinh \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) + \frac{\lambda_n}{L} \sin \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) - K_n \left\{ \frac{\lambda_n}{L} \cosh \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) - \frac{\lambda_n}{L} \cos \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) \right\} \right] \dots (14)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = A \frac{\lambda_n^2}{L^2} \left[ \cosh \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) + \cos \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) - K_n \left\{ \sinh \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) + \sin \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) \right\} \right] \dots (15)$$

(10) تصبح معادلة الإجهاد بالصيغة

وعند تعويض المعادلة رقم (15) الآتية :-

$$\sigma = E.A \frac{\lambda_n^2}{L^2} g_n \left( \lambda_n \frac{x}{L} . Y \right) \dots\dots\dots (16)$$

بما أن أعظم إجهاد يحدث عندما  $Y = h / 2$

الصيغة النهائية لمعادلة الإجهاد في حالة الانحناء تكون بالصيغة الآتية :-

$$\sigma = \frac{h}{2} . E.A . \frac{\lambda_n^2}{L^2} g_n \left( \lambda_n \frac{x}{L} \right) \dots\dots\dots (17)$$

حيث أن :-

h : هو سمك العتبة

$g_n \left( \lambda_n \frac{x}{L} \right)$  هو متوالية لا بعدية لوصف أعظم إجهاد في المقطع (x) على طول العتبة والذي يمكن التعبير عنه بالعلاقة الآتية :-

$$g_n = \left[ \cosh \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) + \cos \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) - kn \left\{ \sinh \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) + \sin \left( \frac{\lambda_n}{L} x \right) \right\} \right] \dots\dots (18)$$



وبتعويض المعادلات رقم (2) (9) (17) في المعادلة رقم (1) نحصل على التردد الطبيعي وبالصيغة الآتية :-

$$\omega_{crack}^2 = \omega_n^2 \left[ 1 - \frac{b \frac{1-\nu^2}{E} (1.12)^2 \sigma^2 \pi \frac{a^2}{2}}{\frac{1}{2} A^2 E \frac{\lambda_n^4}{L^4} I_x \cdot L} \right] \dots (19)$$

$$\omega_{crack}^2 = \omega_n^2 \left[ 1 - \frac{h/2 \frac{1-\nu^2}{E} (1.12)^2 \left( \frac{h^2}{4} E^2 A^2 \frac{\lambda_n^4}{L^4} g_n^2 \left( \lambda_n \frac{x}{L} \right) \pi \frac{a^2}{2} \right)}{\frac{1}{2} A^2 E \frac{\lambda_n^4}{L^4} h^4 / 24L} \right] \dots (20)$$

$$\omega_{crack}^2 = \omega_n^2 \left[ 1 - 3\pi(1-\nu)^2 (1.12)^2 \left( \frac{a}{h} \right)^2 \left( \frac{h}{L} \right) g_n^2 \left( \lambda_n \frac{x}{L} \right) \right] \dots (21)$$

حيث أن :-

$\left( \frac{a}{h} \right)$  يمثل نسبة عمق الشق إلى عرض العتبة.

$\left( \frac{x}{L} \right)$  يمثل نسبة موقع الشق إلى طول العتبة.

3. تأثير أعماق ومواقع الشقوق :

(1) (2) توضح النتائج الرياضية لنسب الترددات الطبيعية بعد إحداث الشق وبأعماق مختلفة في أربع مواقع مختلفة لعتبة مثبتة من جهة وسائبة من جهة أخرى بطول (0.4) متر ، إذ نلاحظ أن نسب الترددات الطبيعية تنخفض مع ازدياد عمق الشق عند ثبوت موقع الشق ، كما لوحظ أيضاً أن نسب الترددات الطبيعية تنخفض مع ابتعاد موقع إحداث الشق من منطقة تثبيت العتبة ولنفس الأعماق .

$(n / )$ (a/h)	( x/L = 0.1)	( x/L = 0.3)	( x/L = 0.5)	( x/L = 0.7)
0.1	0.988419	0.988223	0.987662	0.985373
0.2	0.953675	0.953292	0.950648	0.941494
0.3	0.893768	0.894908	0.888959	0.868361
0.4	0.814699	0.813169	0.802593	0.765975
0.5	0.710467	0.708077	0.691552	0.634336

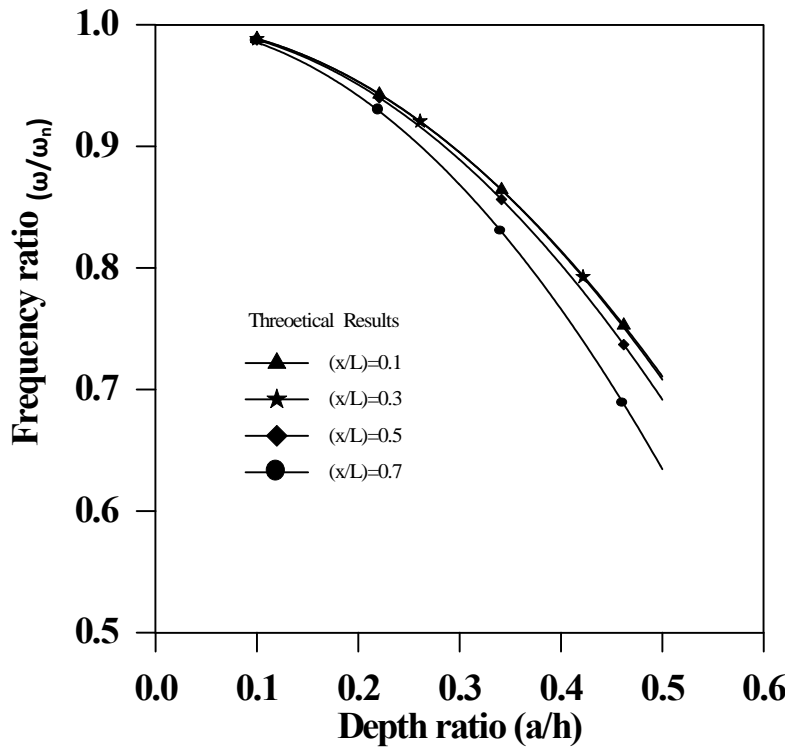
(1) يوضح النتائج الرياضية لنسب الترددات الطبيعية الأساسية للعتبة عند ثبوت الشق .

$(n / )$ (x/L)	(a/h=0.1)	(a/h=0.2)	(a/h=0.3)	(a/h=0.4)	(a/h=0.5)
0.1	0.988419	0.953675	0.893768	0.814699	0.710467
0.2	0.988401	0.953603	0.985607	0.814413	0.710020
0.3	0.988223	0.953292	0.984908	0.813169	0.708077
0.4	0.988112	0.952450	0.893012	0.809800	0.702812
0.5	0.987662	0.950648	0.888959	0.802593	0.691552
0.6	0.986821	0.947284	0.881389	0.789135	0.670524
0.7	0.985373	0.941494	0.868361	0.765975	0.634336
0.8	0.983001	0.932006	0.847013	0.728023	0.575036

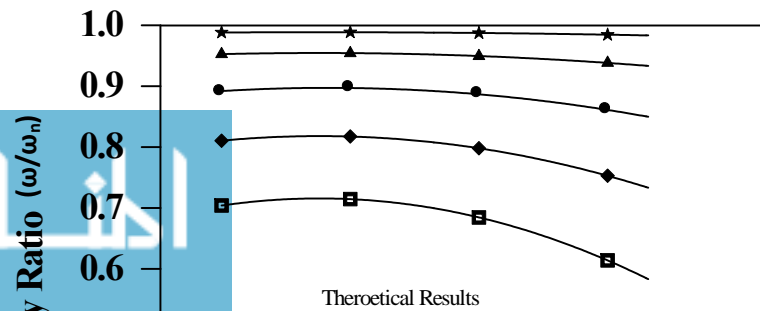
(2) يوضح النتائج الرياضية لنسب الترددات الطبيعية الأساسية للعتبة عند ثبوت الموقع .

(2) انخفاضاً في نسبة الترددات الطبيعية ( $\omega_n$  / ) مع زيادة في نسبة (a/h) . فعند إحداث شق في موقع قريب من موقع تثبيت (x/L = 0.1) نلاحظ أن نسبة الانخفاض في الترددات الطبيعية قليلة جداً ، ومع الابتعاد عن موقع التثبيت للعتبة والاقتراب نحو موقع في منتصف مسافة العتبة أي عندما (x/L = 0.5) يتبين أن هناك انخفاض أكثر في نسب الترددات مع زيادة نسبة عمق الشق من المواقع قريبة لتثبيت العتبة . وعند إحداث شق في مواقع بعد منتصف مسافة العتبة تبين أن هناك انخفاض عالي جداً في نسب الترددات الطبيعية ( $\omega_n$  / ) مع ازدياد في نسبة عمق الشق (a/h) وهذا ما تم ملاحظته في موقع الشق (x/L = 0.7) .

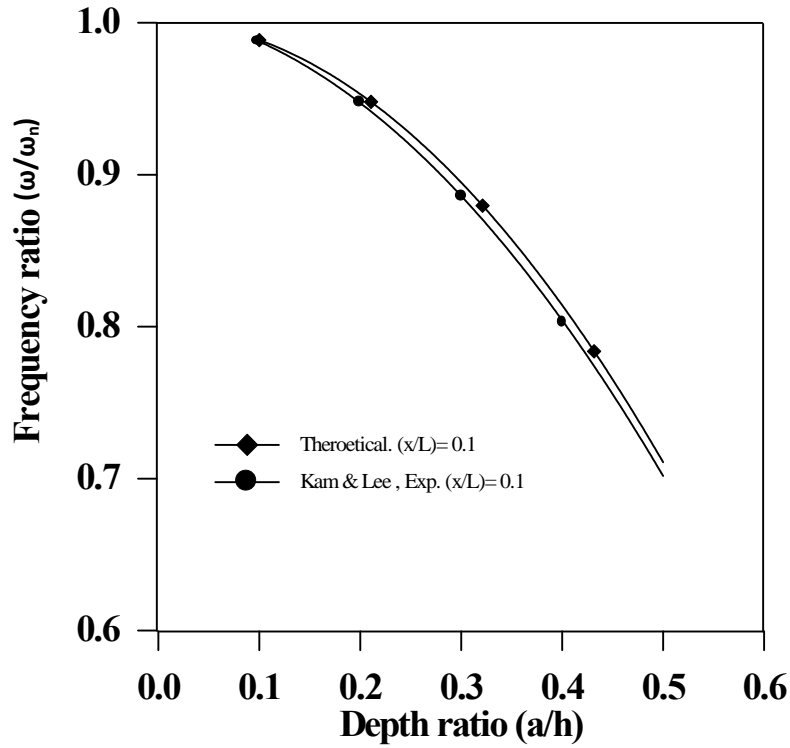
(3) فنلاحظ نفس السلوك في انخفاض نسبة الترددات الطبيعية ( $\omega_n$  / ) مع زيادة نسبة موقع الشق (x/L) . ولأجل التأكد من سلوك المنحنيات للنتائج الحالية ولنسب مواقع مختلفة للشق مع نسبة الشق ، فقد لوحظ أن سلوك هذه المنحنيات كانت مماثلة لما توصل إليها الباحثان (Kam and Lee) [1] الذين اعتمدا في دراستهما على تحليل الاهتزازات للعتبة الحديدية متضمنة شقاً مستخدماً طريقة العناصر المحددة (Finite Elements Methods) عن تحقيق ذلك عملياً والموضحة في الأشكال (4) (5) .



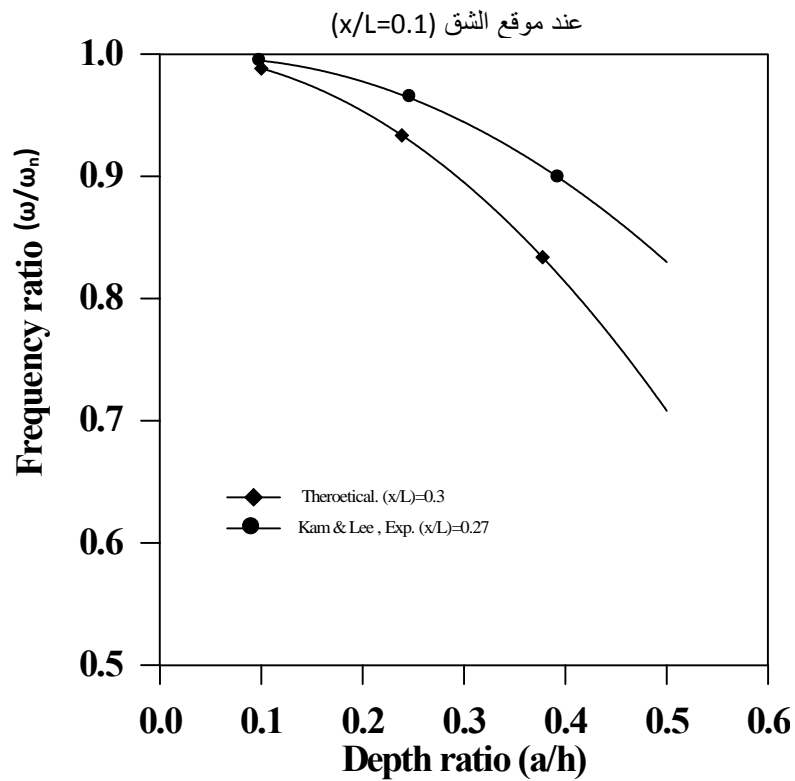
الشكل (2) تغير نسبة التردد الطبيعي مع عمق الشق عند ثبوت موقع الشق







الشكل (4) مقارنة النتائج النظرية مع النتائج العملية للباحثان ( Kam & Lee )



الشكل (5) مقارنة النتائج النظرية مع النتائج العملية للباحثان ( Kam & Lee )

عند موقع الشق (x/L=0.3)

#### 4. الاستنتاجات :

وفي مواقع مختلفة وبأعماق مختلفة أدت إلى انخفاض في قيم الترددات الطبيعية ، لوحظ عند إحداث هذه الشقوق في مواقع قريبة من مواقع التثبيت للعتبة انخفاضاً بسيطاً في نسب الترددات الطبيعية ( $n /$  ) . أما بالنسبة للجهة الحرة الثانية من العتبة ربية من هذه الجهة وضوحاً في نسبة الانخفاض في نسبة الترددات الطبيعية كانت عالية جداً، وهذا ما تم التأكد منه من خلال مقارنة النتائج الرياضية مع بعض العملية لبحوث سابقة فكانت متقاربة وخصوصاً في سلوك منحنيات تردد

#### References

#### المصادر

1. Kam, T.and Lee, T. Y. "**Detection of Cracks in Structures Using Model Data**", Engineering Fracture Mechanics , Vol.24, No.2,pp.381-387 , 1992 .
2. Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D., Yao, T. "**Vibration of a Beam with a Breathing Crack**" , Journal of Sound and Vibration , (2001), 239(1), 57-67 .
3. Matveev, V.V. and Bovsunovsky, A. P. "**Vibration Based Diagnostics of Fatigue Damage of Beam-Like Structure**" , Journal of Sound and Vibration , (2002), 249(1),23-40 .
- 4 . Chandhari, T. D. and Maiti, S. K. "**Experimental Verification of a Method of Detection of Crack in Taper and Segmented Beams Based on Modeling of Transverse Vibration**" International J. of fracture, Vol. 102(2): PP 33-38, 2000.

5. Gudmundson P. Eigen "*Frequency Change of Structure due to Cracks, Notches or other geometrical changes*" Journal of Mechanics Physics of Solids ; 30 339-353 , 1982
6. Young , S. L. And Myung, J. C. "*A Study of Detection using Eigen frequency test data* " Journal of Computer and Structures , Vol.77, pp.327-343, 2000 .
7. Loeber, J.F. and Sih, G.C. ,"*Wave scattering about a penny-shaped crack on a bimaterial interface in dynamic crack propagation*" (Ed.G.Sih) , PP. 513-528 , Nordhoff , Leyden , 1973
8. Blevins, R. D. ,"*Formulas for natural frequency and mode shape*" New York, 1979 .
9. Hiroshi , T. , Pual , C. And George , R. "*The stress analysis of cracks handbook* " Heller town , Vaina , 1973 .
10. Heran, E. J. , "*Mechanics of Materials*" , International Series on material science and Technoigy, Vol.19,1977 .
11. Reddy J.N. "*An Introdition to the Finite Element method*" New York, Mc Grew Hill, 1984 .